Assignment 4 Supplement
Algorithm Design and Analysis

bitjoy.net

January 20, 2016

3 Interval Scheduling Problem

假设有 n 门课，m 个教室。用 x_{ij} 表示第 i 门课是否安排在第 j 个教室，$x_{ij}=1$ 为 Yes，$x_{ij}=0$ 为 No。则有以下两个限制条件：

1. 一门课最多安排在一个教室里
2. 任何时刻，一个教室只能有一门课在进行

首先对所有课程的结束时间排序，使得 $F_1 \le F_2 \le ... \le F_n$，然后求解如下 LP 公式：

$$
\begin{array}{rcll}
\max & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} & & \\
\sum_{j=1}^{m} x_{ij} & \le & 1 & \text{for all } i \qquad (1)\\
F_i(x_{ik}+x_{jk}-1) & \le & S_j & \text{for all } 1 \le i < j \le n, k \qquad (2)\\
x_{ij} & \in & 0,1 & \text{for all } i,j \qquad (3)
\end{array}
$$

第 (1) 个式子很好理解，把一门课在所有教室的安排情况加起来，不大于 1 表示最多只能在一个教室。

第 (2) 个式子对应第 2 个条件，如果第 i 和第 j 门课都安排在第 k 个教室，则要满足这两门课的上课时间没有重叠，即当 $x_{ik}=x_{jk}=1$ 时，有 $F_i \le S_j$；如果 x_{ik} 和 x_{jk} 有一个为 0 或全为 0，则显然满足条件。

如果 F_i 和 S_i 也为整数，则得到一个 Totally Unimodular Matrix[1]，即使将 ILP 松弛成 LP，得到的解也是整数。（助教：I don't konw!）

5 Stable Matching Problem

设 x_{ij} 表示男 i 和女 j 的配对情况，1 表示稳定配对，0 表示不配对。

1. ILP 公式如下：

$$
\begin{array}{llcll}
\min & & & 0 & \\
s.t. & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} & = & 1 & \text{for all } j=1,2,...,n\\
 & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} & = & 1 & \text{for all } i=1,2,...,n\\
 & x_{ij}+x_{kl} & \le & S_{i,j,k,l}+1 & \text{for all } i,j,k,l=1,2,...,n, i\ne k, j\ne l\\
 & x_{ij} & \in & \{0,1\} & \text{for all } i,j=1,2,...,n
\end{array} \qquad (4)
$$

[1] `http://www.imada.sdu.dk/~marco/Teaching/Fall2009/DM204/Slides/TUM-lau.pdf`

前两个限制条件表示一个女生只能和一个男生配对以及一个男生只能和一个女生配对。

第三个限制条件表示，如果 $S_{i,j,k,l}=1$，则 $<i,j>$ 和 $<k,l>$ 一定是稳定的，即 $x_{ij}=1, x_{kl}=1$；如果 $S_{i,j,k,l}=0$，则 $<i,j>$ 和 $<k,l>$ 至少有一个不稳定。

2. ILP 公式如下：

$$
\begin{array}{lrcll}
\min & 0 & & & \\
s.t. & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} & = & 1 & \text{for all } j=1,2,...,n \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} & = & 1 & \text{for all } i=1,2,...,n \\
& x_{ik}+x_{lj} & \leq & 3-p_{l,k,j}-q_{k,l,i} & \text{for all } i,j,k,l=1,2,...,n, k\neq j, l\neq i \\
& x_{ij} & \in & \{0,1\} & \text{for all } i,j=1,2,...,n
\end{array}
\tag{5}
$$

前两个限制条件和 1 问相同。第三个限制条件表示：在 i,j,k,l 这四个人中，如果 $p_{l,k,j}=q_{k,l,i}=1$，则 l 更喜欢 k，同时 k 也更喜欢 l，所以 $<l,k>$ 肯定配对成功，i 和 j 对其没影响，即 $x_{ik}=x_{lj}=0$。

第三个限制条件也可改为 $x_{ij}+x_{kl}\leq 2-p_{i,l,j}q_{j,k,i}$。

6 Duality

For simplicity, we can assume that (u,v) denotes the arc $u\to v$. Then the primal can be rewritten and corrected as:

$$
\begin{array}{lrcll}
\max / \min & 0 & & & \\
s.t. & \sum_{i=1}^{k} f_i(u,v) & \leq & c(u,v) & \text{for each } (u,v) \\
& \sum_{v,(u,v)\in E} f_i(u,v) - \sum_{v,(v,u)\in E} f_i(v,u) & = & 0 & \text{for each } i \text{ and } u\in V\setminus\{s_i,t_i\} \\
& \sum_{v,(s_i,v)\in E} f_i(s_i,v) - \sum_{v,(v,s_i)\in E} f_i(v,s_i) & = & d_i & \text{for each } i \\
& f_i(u,v) & \geq & 0 & \text{for each } i,(u,v)
\end{array}
\tag{6}
$$

If we use x_{uv} to denote the first constraints, y_{iu} the second and third constraints, then the duality is:

$$
\begin{array}{lrcll}
\min & c(u,v)x_{uv}+d_i y_{is_i} & & & \\
s.t. & x_{uv}+y_{iu}-y_{iv} & \geq & 0 & \text{for all } i \text{ and } u\neq t_i, v\neq t_i \\
& x_{ut_i}+y_{iu} & \geq & 0 & \text{for all } i,(u,t_i) \\
& x_{t_iv}-y_{iv} & \geq & 0 & \text{for all } i,(t_i,v) \\
& x_{uv} & \geq & 0 & \text{for all } (u,v)
\end{array}
\tag{7}
$$

or

$$
\begin{array}{lrcll}
\max & c(u,v)x_{uv}+d_i y_{is_i} & & & \\
s.t. & x_{uv}+y_{iu}-y_{iv} & \leq & 0 & \text{for all } i \text{ and } u\neq t_i, v\neq t_i \\
& x_{ut_i}+y_{iu} & \leq & 0 & \text{for all } i,(u,t_i) \\
& x_{t_iv}-y_{iv} & \leq & 0 & \text{for all } i,(t_i,v) \\
& x_{uv} & \leq & 0 & \text{for all } (u,v)
\end{array}
\tag{8}
$$

8 LP And Iterative Algorithm

Too cumbersome to finish it.