Assignment 3 Supplement
Algorithm Design and Analysis

bitjoy.net

January 13, 2016

1 Greedy Algorithm

给定一系列自然数 $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n \geq 0$，如果存在一个图，其每个顶点的度数分别是 $d_1, d_2, ..., d_n$，当且仅当存在另一个图，其每个顶点的度数分别为 $d_2 - 1, d_3 - 1, ..., d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, ..., d_n$。

下面我们来证明这个定理。

$\Leftarrow$ 如果存在一个图,其每个顶点的度数分别为 $d_2-1, d_3-1, ..., d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, ..., d_n$，则我们添加一个顶点 v_1,将 v_1 和后面 d_1 个点都连一条边,则新的图中,顶点 $v_1, v_2, ..., v_n$ 的度数分别为 $d_1, d_2, ..., d_n$。

$\Rightarrow$ 如果存在一个图，其每个顶点的度数分别为 $d_1, d_2, ..., d_n$，且满足 $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n \geq 0$，则 v_1 恰和后面 d_1 个顶点都有一条边。如果把 v_1 及其 d_1 条边删掉，则形成了一个顶点度数分别为 $d_2 - 1, d_3 - 1, ..., d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, ..., d_n$ 的图。

假设存在某个点 $i \in [2, d_1 + 1]$ 和 v_1 没有边，则 v_1 为了凑够 d_1 条边，必须和某个点 $j \in [d_1 + 2, n]$ 有一条边。同时因为 $d_i \geq d_j$，必存在一个点 k，v_i 连了但 v_j 没连。所以我们删除边 (v_i, v_k) 和 (v_1, v_j), 添加上边 (v_1, v_i) 和 (v_j, v_k)，则每个顶点的度数都没有改变，但 v_1 和其后 d_1 个顶点都有了连边。所以上面证明的第二步成立。

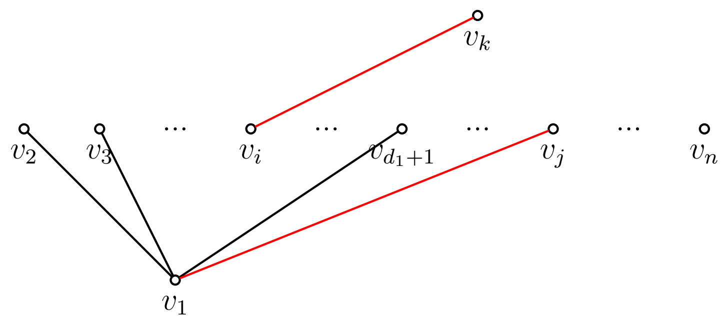

Figure 1: 原图 G，v_1 并没有和其后 d_1 个点都有边。

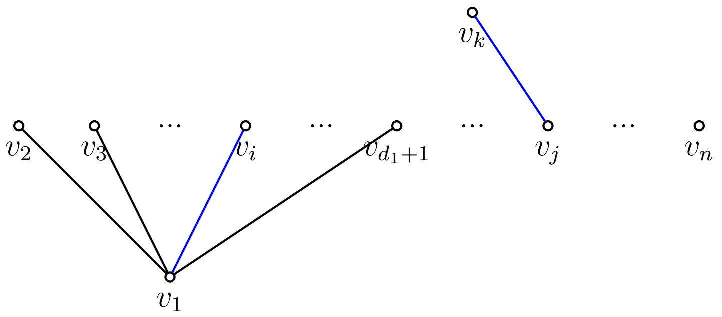

Figure 2: 转换后的图 G'，v_1 和其后 d_1 个点都有边，G' 和 G 等价。

```
GRAPH-EXISTING(D)
if D = NULL
    return true
sort D in descending order
remove d_1 from D
for i = 2 to d_1 + 1
    d_i = d_i - 1
    if d_i < 0
        return false
    elseif d_i == 0
        remove d_i from D
return GRAPH-EXISTING(D)
```

时间复杂度为 $O(n^2 logn)$。

4 Greedy Algorithm

和第 3 题类似，分别把 A 和 B 从大到小排序，然后把 a_i 和 b_i 配对，得到的 $\prod_{i=1}^{n} a_i^{b_i}$ 最大。

使用 *exchange argument* 证明如下：

假设用该算法得到的解为 S，对于另一个解 $S' \neq S$，必存在某两对 (a_i, b_i) 和 (a_j, b_j)，他们是逆序对，即 $a_i \geq a_j$ 且 $b_i \leq b_j$，乘积为 $T' = a_i^{b_i} a_j^{b_j}$。如果交换这两对，使得 (a_i, b_j) 和 (a_j, b_i)，消除了逆序对，新的乘积为 $T = a_i^{b_j} a_j^{b_i}$，我们要证明 $T \geq T'$。

$$\frac{T}{T'} = \frac{a_i^{b_j} a_j^{b_i}}{a_i^{b_i} a_j^{b_j}} = a_i^{b_j - b_i} a_j^{b_i - b_j} = (\frac{a_i}{a_j})^{b_j - b_i} \geq 1$$

所以 $T \geq T'$。也就是说，由 S' 转换到 S 的过程中，并没有减小乘积，所以 S 是最优解。